

Cahit Arf Matematik Günleri I - 2002

Çıkarma ve Kare Alma Altında Kapalı Sayı Kümeleri

Tanımlar: $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$ olarak, $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z\}$ olarak tanımlanmıştır. *, gerçel sayılarda tanımlanmış (toplama, çıkarma, çarpma gibi) ikili bir işlem olsun. A bir gerçel sayılar kümesiye ve her $a, b \in A$ için, $a * b \in A$ ise, o zaman “A, * altında kapalı” denir. Eğer her $a \in A$ için, $a^2 \in A$ ise “A kare alma altında kapalı” denir. Eğer A’nın her $a \neq 0$ sayısı için, a^{-1} de A’daysa, A kümesine “tersini alma altında kapalı” denir.

Aşağıdaki teoremi (kanıtlamadan) kullanmaya ihtiyacınız olabilir:

Teorem. Eğer $n \in N$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in Z$ ve $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n = 0$ ise, o zaman $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ ’dır.

1. Çıkarma altında kapalı olan bir reel sayılar kümesinin toplama altında da kapalı olduğunu gösterin.

Kanıt: Sonuç, $x + y = x - ((x - x) - y)$ eşitliğinden çıkar.

2. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve her ögesinin yarisını da içeren bir gerçel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Kanıt: $xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$ eşitliğinden ve bir önceki sorudan hemen çıkar.

3. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve $1/2$ ’yi de içeren bir gerçel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Kanıt: $1/2$ kümede olduğundan, karesi $1/4$ de kümede. Ayrıca aşağıdaki eşitliğe dikkatinizi çekelim:

$$x/2 = (x + 1/4)^2 - x^2 - (1/4)^2.$$

Demek ki küme ikiye bölme altında kapalı. Şimdi ikinci sorudan istediğimiz çıkar.

4. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir gerçel sayı kümesi bulun.

Yanıtlardan biri: $A = \{a_1\pi + a_2\pi^2 + 2a_3\pi^3 + a_4\pi^4 + \dots + a_n\pi^n : n \in N \setminus \{0\}, a_i \in Z\}$ olsun. A’nın

çıkarma ve kare alma altında kapalı olduğunu görmek oldukça kolay. Ama $\pi, \pi^2 \in A$ ve $\pi\pi^2 = \pi^3 \notin A$. (π^3 sayısının A’da olmadığı başta verilen teoremden çıkar.)

5. Çıkarma ve tersini alma altında kapalı olan ve $1/2$ ’yi içeren bir gerçel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Kanıt: Önce $1/2 + 1/2 = 1$ ’in kümede olduğuna dikkatinizi çekeriz. Şimdi

$$((y - (1 + y^{-1})^{-1})^{-1} - y^{-1})^{-1} = y^2$$

eşitliğini ve üçüncü soruyu kullanın.

6. Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir kesirli sayı kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.

Yanıt: A, çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir kesirli sayılar kümesi olsun. $u, v \in A$ olsun. $a, b, c, d \in Z$ için $u = a/b$ ve $v = c/d$ olsun. Ve e, ad ve bc sayılarının en büyük ortak böleni olsun. Şimdi

$$u = a/b = (e/bd)(ad/e) \in (e/bd)Z$$

ve

$$v = c/d = (e/bd)(bce) \in (e/bd)Z.$$

Demek ki $uv \in (e^2/b^2d^2)Z$. Dolayısıyla uv sayısının A’da olduğunu kanıtlamak için, e^2/b^2d^2 sayısının A’da olduğunu kanıtlamalıyız. Bunun için de e/bd sayısının A’da olduğunu göstermek yeterli. $e = \text{ebob}(ad, bc)$ olduğundan, öyle x ve y tamsayıları vardır ki $adx + bcy = e$. Demek ki

$e/bd = (adx + bcy)/bd = (a/b)x + (c/d)y = ux + vy$ ve bu son sayı da A’dadır. Demek ki e/bd de A’da.

7. $Q[\sqrt{2}]$ (ya da $Z[\sqrt{2}]$) kümesinin bir altkümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa çarpma altında da kapalı mıdır?

Yanıt: Bu sorunun yanıtını yarışmadan önce biz de bilmiyorduk. Yarışmadan sonra yanıtın $Z[\sqrt{2}]$ için olumlu olduğunu lise düzeyini aşan bir soyut cebir bilgisi kullanarak kanıtladık. Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü üçüncü sınıf öğrencisi Serhat Doğan $Q[\sqrt{2}]$ için yanıtın olumlu olduğunu lise düzeyinde bir kanıtlarla gösterdi. Böylece soru $Z[\sqrt{2}]$ için de lise düzeyinde yanıtlanmış oldu. Bundan sonraki yazıda Serhat Doğan’ın kanıtını bulacaksınız. ♥

Q[$\sqrt{d}$]'nin Çıkarma ve Kare Alma Altında Kapalı Altkümeleri

Serhat Doğan* / kelaker@gmail.com

Bu yazıda aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız:

Teorem. $Q[\sqrt{d}]$ kümesinin bir altkümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa çarpma altında da kapalıdır.

Önce kolay bir önsav:

Önsav. Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$, çıkarma ve kare altında kapalıysa, o zaman her $\alpha, \beta \in A$ için, $\alpha + \beta \in A$ ve $2\alpha\beta \in A$. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{Z}$ için $n\alpha \in A$.

Kanıt: $0 = \alpha - \alpha \in A$ olduğundan, $-\beta = 0 - \beta \in A$. Dolayısıyla $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta) \in A$. Bundan da $2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 \in A$ çıkar. Eğer $n > 0$ ise, $n\alpha = \alpha + \dots + \alpha$ olduğundan, $n\alpha \in A$. Buradan, her $n \in \mathbb{Z}$ için, $n\alpha \in A$ çıkar. $\square$

Teoremin Kanıtı. Eğer d bir tamkareyse o zaman $Q[\sqrt{d}] = \mathbb{Q}$ 'dir ve bu durumda kanıt bir önceki yazıda verildi. Bundan böyle d 'nin bir tamkare olmadığı varsayalım.

$A \subseteq Q[\sqrt{d}]$ çıkarma ve kare alma altında kapalı bir küme olsun. $\alpha, \beta \in A$ olsun. $\alpha\beta$ 'nin da A 'da olduğunu kanıtlayacağız. Önsav'dan dolayı $\alpha^2, \beta^2, 2\alpha\beta \in A$.

Kanıtımız iki adımdan oluşacak: İlki bu iki sayıdan birinin kesirli olduğu, diğeryse ikisinin de kesirli olmadığı durum.

Birinci Şık. Eğer α ya da β Kesirliyse. α 'nın kesirli olduğunu varsayabiliriz. Birbirine asal p ve q tamsayıları için $\alpha = p/q$ yazalım.

Eğer q Tekse. p bir tamsayı olduğundan, $p\beta \in A$. Ama $p\beta = q\alpha\beta$. Demek ki $q\alpha\beta \in A$. Şimdi, q tek olduğundan, $q\alpha\beta$ 'dan yeterince $2\alpha\beta$ çıkararak $\alpha\beta$ 'nin A 'da olduğunu görürüz.

Eğer q Çiftse. O zaman p bir tek sayıdır ve bir r tamsayısı için $q = 2r$ yazabiliriz. $\alpha \in A$ olduğundan, $\alpha^2 \in A$ ve Önsav'dan dolayı $2\alpha^2\beta \in A$, ve dolayısıyla $r(2\alpha^2\beta) \in A$. Ama $r(2\alpha^2\beta) = 2r\alpha^2\beta = 2r\alpha(\alpha\beta) = p\alpha\beta$. Demek ki $p\alpha\beta \in A$. Burada p tek

sayı olduğundan, $p\alpha\beta$ 'dan yeterince $2\alpha\beta$ çıkararak $\alpha\beta \in A$ elde ederiz.

İkinci Şık: Eğer α ve β Kesirli Değilse. Bu durumda bir önsava daha ihtiyacımız var:

Önsav. Eğer $\alpha, \beta \in Q[\sqrt{d}]$ kesirli değilse, o zaman aralarında asal olan öyle x ve y tamsayıları vardır ki, $\alpha x + \beta y \in \mathbb{Q}$.

Kanıt: $\alpha = u_1 + u_2\sqrt{d}$ ve $\beta = v_1 + v_2\sqrt{d}$ olsun. Burada, $u, u_1, v, v_1 \in \mathbb{Q}$. Birbirine asal olan ve $ux + vy = 0$ eşitliğini sağlayan x ve y tamsayılarını bulmak istiyoruz. u_1, u_2, v_1, v_2 tamsayıları için, $u = u_1/u_2$ ve $v = v_1/v_2$ yazalım. Ayrıca u_1 'le u_2 'nin ve v_1 'le v_2 'nin birbirlerine asal olduklarını varsayalım. $\text{ebob}(u_1, v_1) = w_1$ ve $\text{ebob}(u_2, v_2) = w_2$ olsun. $u_1 = w_1r_1, v_1 = w_1s_1, u_2 = w_2r_2, v_2 = w_2s_2$ olsun. Burada, r_i 'le s_i birbirlerine asaldır. Ayrıca, u_1 'le u_2 ve v_1 'le v_2 birbirlerine asal olduklarından r_1 'le r_2 ve s_1 'le s_2 birbirlerine asaldır. Şimdi $x = r_2s_1$ ve $y = -r_1s_2$ olsun. Söylediklerimizden x 'le y 'nin birbirlerine asal oldukları çıkar. Şimdi,

$$\begin{aligned} ux + vy &= \frac{u_1}{u_2}x + \frac{v_1}{v_2}y = \frac{w_1r_1}{w_2r_2}x + \frac{w_1s_1}{w_2s_2}y \\ &= \frac{w_1r_1}{w_2r_2}r_2s_1 + \frac{w_1s_1}{w_2s_2}(-r_1s_2) = \frac{w_1r_1s_1}{w_2} - \frac{w_1r_1s_1}{w_2} = 0. \end{aligned}$$

Böylece önsavımız kanıtlanmış oldu. $\square$

Önsavdaki gibi x ve y sayıları alalım. O zaman $\alpha x + \beta y \in \mathbb{Q} \cap A$. Birbirlerine asal olduklarından x ya da y sayılarından biri tek olmalı. Genelliği bozmadan x 'in tek olduğunu varsayabiliriz. Elbette $\alpha x + \beta y \in \mathbb{Q} \cap A$. İlk şıktan dolayı, $(\alpha x + \beta y)\beta \in A$. Ama $\beta^2 \in A$ ve $\beta^2y \in A$.

Dolayısıyla $\alpha\beta = (\alpha x + \beta y)\beta - \beta^2y \in A$. Ama x tek sayı olduğundan, $\alpha\beta$ 'dan yeterince A 'da olan $2\alpha\beta$ 'yı çıkararak $\alpha\beta \in A$ elde ederiz.

Teoremimiz kanıtlanmıştır. $\uparrow$



* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü 3. sınıf öğrencisi.